北京师范大学数学系
本科生数学分析掌握情况调查

丁春平　郁中丹

摘要

这一调查的目的是为了了解数学系本科生对数学分析基本内容的掌握情况并做出初步的分析，具体步骤：前期研究，对数学分析的调查内容作研究；设计调查表；实施调查；对测试结果作分析。

关键词：调查，数学分析，测试

为了了解和掌握数学系本科生对数学分析学习的基本情况，并对其存在的问题和缺点获得定量的了解，笔者在数学系本科生实施了这次调查。

§1　调查

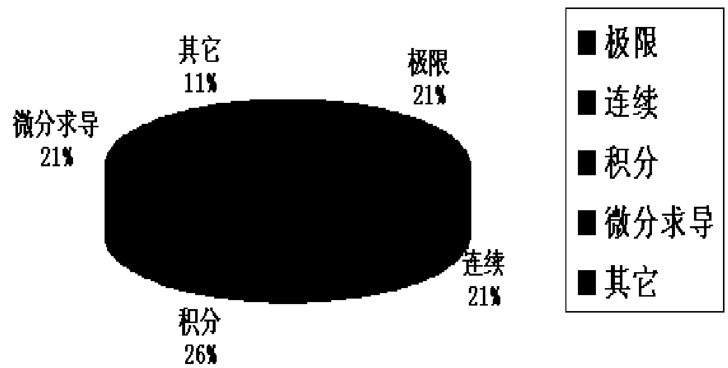
§1.1　设计试题

为了设计问卷试题，笔者在导师的指导和帮助下，广泛参考分析了各种数学分析教材。认真分析了数学分析的基本知识构成和在后续课程中用到的重要部分，并在华东师大的测试题的基础上进一步整理得到这份测试题。这份试题并没有追求对数学分析的全面覆盖，着重考察学生对极限，连续概念的认识和理解，对一元微积分理论的理解与运用，包括由定义出发进行证明。

测试题大致构成如下图 [1]：

图 1-1，测试题分布

[1]测试题目见附录



极限部分包括 1， 5， 13， 16 题；连续部分包括 2， 3， 6 题；积分部分包括 7， 8， 11， 12 题；微分求导部分包括 4， 9， 10 题；其他包括 16(用上确界定义进行证明)， 14(幂级数)， 15(Taylor 级数)。

笔者所选择的内容均为数学分析最基本的知识，同学们至少在学完分析后应该学会的知识。这份测试题是以最直接，最简单的方式来了解经过时间的沉淀同学们最终学会了分析的什么知识。

笔者认为基础知识和基本原理是数学分析中最难掌握的一部分，极限和连续是数学分析中的基础原理，所以笔者在选择试题时着重考虑了这几个部分。

如解答题第 16 题，用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$。分析的入门就是 $\varepsilon-\delta$ 语言，笔者想从定量上掌握同学是否可以用数学语言把证明过程说清楚明白.

又如填空题的第 10， 11 题 $(10.\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x})$， $11.\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx)$, 只要学过分析课程的同学都知道解决这两个题目的方法。笔者的目的就是考察同学们是否掌握了这类题目的做法。

§1.2 调查对象

数学系本科生 2000 级 1， 2， 3 班 84 名同学。测试用时 20 分钟。

数学系本科生 2001 级 1， 4 班 41 名同学。测试用时 20 分钟。

均已完成数学分析课程的学习。

§1.3 统计手段

运用 spss 软件对 125 份有效答卷进行数据统计。

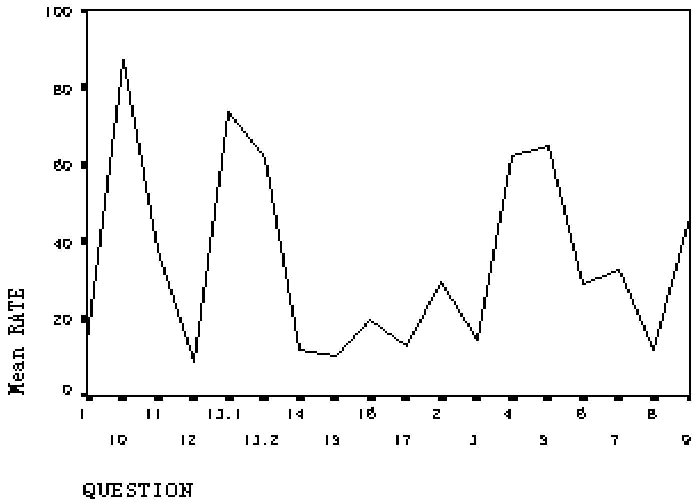
§2 结果

§2.1 各题统计结果

表 2-1. 各题统计结果

问题	1	2	3	4	5	6
得分率	13.6%	29.6%	14.4%	62.4%	64.8%	28.8%
问题	7	8	9	10	11	12
得分率	32.4%	12%	46.4%	87.2%	37.6%	8.8%
问题	13	14	15	16	17	
得分率	73.6 % 61.6%	12%	10.4%	19.8%	13.2%	

图 2-2. 各题得分折线图



§2.1.1 数据统计方法

选择题：此题答案不唯一。

答案唯一的题目选对“ +1 ”，选错或不选“ +0 ”.

答案不唯一的题目，选多或选错“ +0 ”，少选加相应比例的分值。如：第一题答案为 AC，若某位同学答案为 A 或 C，则“ $+\frac{1}{2}$ ”，其余题目类似；

填空题：正确“ +1 ”，错误或不填“ +0 ”；

解答题：每题均有若干个关键语句，每叙述一句“ +1 ”.

表 3-1 的统计结果以上述方法累加并除以总人数 125 再除以本题分数所得的百分率。即为 100 人中答对此题的人数。

这次调查结果很令人震惊．第 10， 11 题每个同学都应该做对的题目得分率也仅有 87.2% 和 37.6% 。而其他需要功底的题目如第 12， 15 等题目的得分率更加惨不忍睹。

§2.1.2 个别案例初步分析

第 12 题交换累次积分的顺序[2]：$\int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ 。此题的答案可谓五花八门，现对其中的四种典型错误答案进行数据分析[3]

表 2-2. 第 12 题统计结果

[2]此题正确答案为： $\int_{-1}^{0} dx \int_{-y}^{1} f(x,y)dy + \int_0^1 \int_{x^2}^{1} f(x,y)dy$

[3]四种错误依次为

1.$\int_{-1}^{1} dx \int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy$

2.$\int_{-1}^{0} dx \int_0^{-x} f(x,y)dy + \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)dy$

3.$\int_{-y}^{\sqrt{y}} dx \int_0^1 f(x,y)dy$

4.$\int_{-1}^{1} \int_0^{x^2} f(x,y)dy$

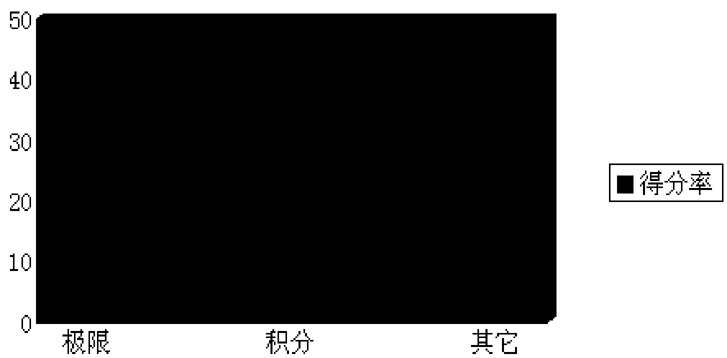
错误类型	一	二	三	四
人数	14	7	16	12
占总人数百分比	11.2%	5.6%	12.8%	9.6%

这些错误都是没有从根本上理解累次积分和积分区域，只是形式上明白交换累次积分的方法，犯下这么多的错误应该归咎于基本功不扎实。除此之外还有 52% 的同学根本不会交换累次积分顺序，答卷上为空缺。

§2.2 各部分统计结果

数据为百分比

图 2-2. 各部分统计结果



由图可以看出微分求导是学生较强的一项，而其他则为相对较弱的部分.

极限部分：对基本定义掌握不够扎实。这一部分只有 3 位同学全部做正确。如第 1 题同学们对数列极限存在的充要条件很模糊，只有 5 位同学选正确， 24 位同学只知其一不知其二。其他的 95 位同学全都选错。可见绝大部分同学对极限理解的很不充分，需要加强。又如 16 题只有 6 位同学能把此题目的所有关键语句叙述清楚，75 位同学得到 0 分。

连续部分：对连续，一致连续的定义及判定条件不清楚。没有一位同学把这部分的题目全部做正确， 25 位同学得 0 分。

积分部分：对可积，广义积分定义理解及掌握不牢固，积分计算不熟练。无全正确的同学。第 11 题有 47 位同学计算正确。甚至有同学已经不记得如何计算定积分，结果中依然带有积分变量。

微分求导部分：这一部分是答卷中做的最好的一部分。但是也只有 4 位同学全部正确。

其它：这部分是答卷中最差的部分。有 3 位同学全做正确，而有 85 位同学得了 0 分。

§3 原因的初步分析

§3.1 无法适应中学生与大学生的角色转换

数学分析是数学系入门的最基础课程。在某种程度上说也属高等数学最典型的代表，所以数学分析甚至被一些老师和同学戏称为“洗脑”的过程。事实上，所谓“洗脑”就是由中学的思维方式转换成另外一种更抽象更概括的思维方式。在中学阶段的初等数学理论不多，而相对的实例不少，可以看成是一种技能的练习；而高等数学则容量较大，抽象的理论和定理铺天盖地，认识起来也相对困难。

所谓“到什么山上唱什么歌”如果拿着学习中学初等数学的方法来进行高等数学的学习，那肯定是行不通的！在从中学数学到大学数学的转换实际上就和电脑升级是一样的，在处理更加复杂的问题时电脑就要进行升级换代，所以同学们的思维方式和学习方法也要及时进行更新。不能像以往一样只是热衷于对一些细小技法的练习，要习惯于对大量的理论知识的掌握和运用。数学分析在某种程度上是大学学习和生活的缩影，具有很大的代表性，很多课程与数学分析具有相似的特点。所以要尽快掌握新的学习方法，学会学习高等数学。惟其如此，才能在今后的学习中占得先机。

§3.2 学习目的发生偏差

大学的学习生活比较自由，学习上的竞争没有中学的激烈，不再用挤升学的独木桥。所以让很大一部分同学一时失去了学习的目标。大学的学分学时制更让一部分学生放松了学习。认为只要成绩通过了 60 分，拿到了学分就完全可以毕业，不会对自己造成任何的影响。所以平时听课做作业不积极，态度不端正，甚至不听课，抄袭作业。只有进入考试复习阶段才四处借笔记，划重点，背题。熬夜苦读几日便可把数学分析的皮毛知识大致掌握。如求导，积分等计算题掌握的灵活自如，但是基础知识基本原理的运用却一窍不通。就这样度过考试，全身而退。结果对分析在形式上一知半解。经过时间的沉淀，有这次的调查结果也就不足为怪了！

§3.3 遇到难点绕开走，没有勇攀高峰的精神

对于一门相对全新的课程，其中一定会有某些部分也是相对困难的。数学分析中相对较难掌握的就是理论原理部分，而微积分的计算则相对比较容易，只需掌握一些技巧便可迎刃而解。问卷中反映的问题是各种计算题正确率较高，而涉及到原理的一些判断和证

明题正确率却偏低。

§4　结束语

通过这次调查，不得不引人深思。大学的教学改革也是势在必行的！

同学们认为课堂气氛过于沉闷，教学方式过于单一。建议在一年级适当改变一下教学方式，让同学们有时间适应中学和大学的转换。

老师们认为应该端正学生学习态度，培养学生吃苦耐劳精神。学生的学习目的发生了变化，使得一部分学生不知道学习到底是为了什么；大学生活过于自由散漫，致使学生没有中学时的吃苦耐劳，所以建议入学教育可以加强这部分指导。

这次调查历经一个学期之久，笔者深刻体会到了基础教学的重要性，只有掌握了扎实牢固的基本功才能在数学的海洋中自由航行！

[附录]

数学分析测试题

[测验说明]:

1. 本测验的目的是了解同学们对数学分析的一些概念和结论的理解情况，测验结果与同学们的数学分析成绩无关.
2. 请同学们在二十分钟内独立完成 (不看书，不讨论).

一. 选择题 (答案不唯一)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 存在的充要条件：（　　）

$A.$ $\exists$ 常数 $M>0, \forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N$, 有 $|x_n-a|<M\varepsilon$;

$B.$ $\forall\varepsilon>0, \exists$ 常数 $M>0, \exists N, \forall n>N$, 有 $|x_n-a|<M\varepsilon$;

$C.$ $\forall\varepsilon>0, \exists N$ 使得 $\forall k, \forall n>N$, 就有 $|x_n-x_{n+k}|<\varepsilon$;

$D.$ $\forall\varepsilon>0, \exists N, \exists$ 常数 $M>0, \forall n>N$, 有 $|x_n-a|<M\varepsilon$;

$E.$ $\forall\varepsilon>0, \forall k, \exists N$ 使得 $\forall n>N$, 就有 $|x_n-x_{n+k}|<\varepsilon$.

2. 下列叙述不正确的是：（　　）

$A.$ $f(x)=[x]$ 在区间 [0,2] 存在原函数;

$B.$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在区间 [-1,1] 不存在原函数;

$C.$ $f(x)=sgnx$ 在区间 [-1,1] 存在原函数;

$D.$ $f(x)=|x|$ 在区间 [-1,1] 不存在原函数.

3. $f(x)$ 在 (0,1) 上一致连续的充分且必要的条件是：（　　）

$A.$ $f(x)$ 在 (0,1) 上有界;

$B.$ 存在定义在 [0,1] 上的连续函数 $F(x)$, 使得 $\forall x\epsilon(0,1), F(x)=f(x)$;

$C.$ $\lim\limits_{x\to0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$;

$D.$ $\forall\varepsilon>0, f(x)$ 在 $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ 上一致连续.

4. 如果 $f(x,y)$ 有连续偏导数，则 $\dfrac{d}{dx}(\displaystyle\int_0^{\sin x} f(x,y)dy)$=:（　　）

$A.$ $f(x,\sin x)\cos x+\displaystyle\int_0^{\sin x} f_x(x,y)dy$;　　$B.$ $f(x,\sin x)\cos x$;

$C.$ $\cos x\displaystyle\int_0^{\sin x} f(x,y)dy$;　　$D.$ $\displaystyle\int_0^{\cos x} f(x,y)dy$.

5. 计算： $\lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}$ =:（　　）

$A.$ 1　　$B.$ 0　　$C.$ π　　$D.$ 不存在.

6. 下列叙述正确的是：（　　）

$A.$ $f(x)=\sqrt{x}$ 在 [0,+∞) 一致连续;

$B.$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 (0,1) 一致连续;

$C.$ $f(x)=x+\sin x$ 在 (-∞,+∞) 不一致连续;

$D.\quad f(x)=x^2$ 在 [0,2] 不一致连续.

7. 下列叙述正确的是：（　　）

$A.\quad f(x)=\begin{cases}\sin[\dfrac{1}{x}] & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ 在 [0,1] 不可积;

$B.$ Riemann 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & ,x=\dfrac{p}{q}(\dfrac{p}{q}\text{既约且}q>0)\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$ 在 [0,1] 不可积;

$C.\quad f(x)=[x], g(x)=x-[x], \varphi(x)=\sqrt{x-[x]}$ 在每一个区间 [a,b] 均可积;

$D.$ 若 f 是区间 [a,b] 上的可积函数，且 $f\geq c>0$, 那么 $\dfrac{1}{f}$ 可积.

8. 下列对广义积分的敛散性判断正确的是：（　　）

$A.\quad \displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 发散;　　$B.\quad \displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$ 收敛;

$C.\quad \displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛;　　$D.\quad \displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$ 发散.

9. 下列函数中在 $x=2$ 不可微的函数是：（　　）

$A.\quad y=|x^2-2|$;　　$B.\quad y=\sqrt[3]{x-1}$;

$C.\quad y=(x-2)^{\frac{4}{3}}$;　　$D.\quad y=\sqrt[3]{x-2}$.

二. 填空题

10. $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x})$=(　　　　);

11. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}xe^{-x}dx$ =(　　　　);

12. 交换累次积分的顺序：$\displaystyle\int_0^1 dy\int_{-y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$=(　　　　);

13. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ =(　　　　);

当 $x_n>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$=(　　　　)

14. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[3+(-1)^n\right]^n x^n$ 的收敛半径 R=(　　　　);

15. 写出 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开式 (　　　　　　　　)

三. 解答题

16. 用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$

17. 用确界定义证明：实数集 (0,1) 的上确界是 1.