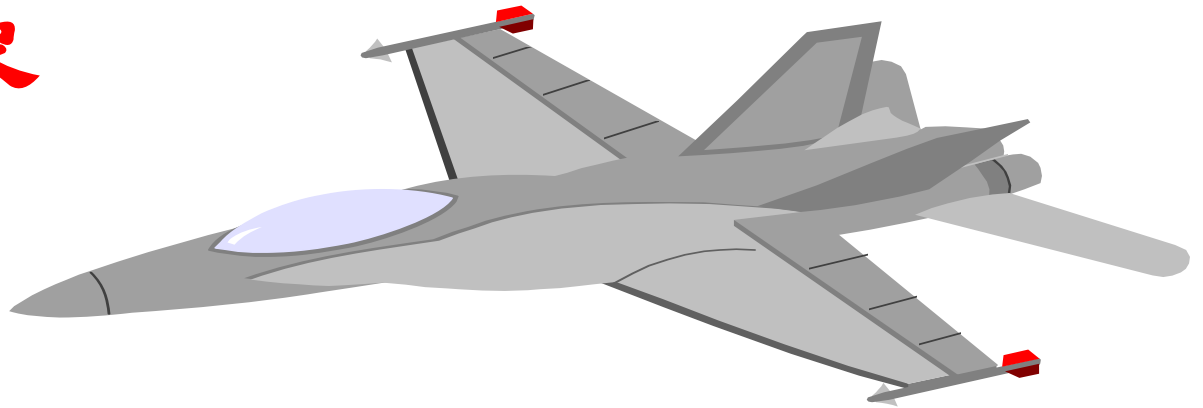


# 第一章 数学模型



# 一. 模型

- 为了一定的目的，人们对原型的一个抽象



## 二. 数学模型



通过抽象和化简，

- 使用数学语言，
- 对实际问题的一个近似描述，
- 以便于人们更深刻地认识所研究的对象。



## 。 例1: 牛顿定律

假设:

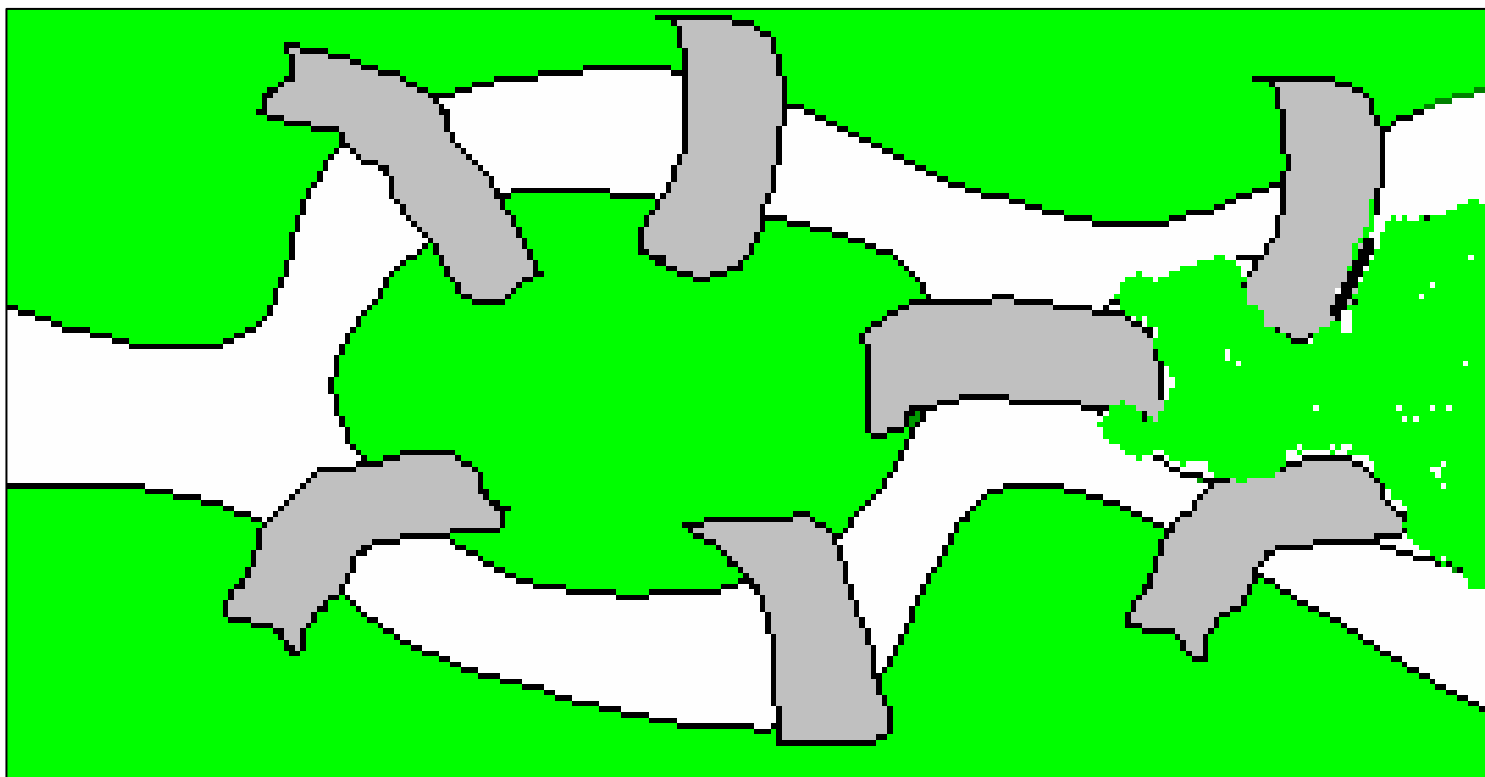
---

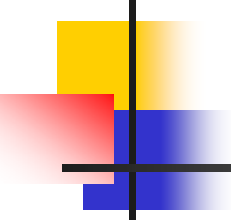
- 1. 物体为质点, 忽略物体的大小和形状。
- 2. 没有阻力、摩擦力及其他外力。
- 令  $x(t)$  表示在  $t$  时刻物体的位置, 则

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

# 例2: 哥尼斯堡七桥问题

1736 Königsberg Pregel Euler



- 
- 
- **数学模型是架于数学与实际问题之间的桥梁**
  - **在数学发展的进程中无时无刻不留下数学模型的印记。**

# 三. 数学模型的特征

## 1. 实践性:

- 有实际背景，有针对性。

- 接受实践的检验。

## 2. 应用性:

- 注意实际问题的要求。

- 强调模型的实用价值。

## 3. 综合性:

- 数学知识的综合。

- 模型的综合。

## 四. 模型举例

### ■ 例 1. 管道包扎

■ 问题：用带子包扎管道，使带子全部包住管道，且用料最省。

■ 假设：

- 1. 直圆管，粗细一致。
- 2. 带子等宽，无弹性。
- 3. 带宽小于圆管截面周长。
- 4. 为省工，包扎时不减断带子。



问题：用带子缠绕包扎管道，使带子全部包住管道，且互不重叠。

---

■ 参量、变量：

■  $W$ ：带宽， $C$ ：截面周长， $\theta$ ：倾斜角

■ 模型（倾斜角模型）

$$\sin \theta = \frac{W}{C}$$

■ 讨论：

■ 1. 实用么？

■ 2. 深刻么？



## 模型（截面模型）

---

$$OB = \sqrt{C^2 - W^2}$$

### 讨论

- 1. 实用性
- 2. 深入分析



已知：管长  $L$ ，管粗  $C$ ，带宽  $W$ ，求带长  $M$ ？

---

$$M = \frac{LC}{W} + \sqrt{C^2 - W^2}$$

● 若  $L = 30\text{m}$ ,  $C = 50\text{cm}$ ,  $W = 30\text{cm}$

● 则有

$$M = (30 \times 0.5 / 0.3) + 0.4 = 50.4(\text{m})$$



## 问题:

- 若有带长  $M_1=51\text{m}$ ，缠绕包扎上面的管道。
- 多余的 60 cm 带子不打算裁掉。缠绕时允许带子互相重叠一部分。
- 应该如何包扎这个管道？（计算结果精确到0.001）

## 例2. 地面上的方桌

- 在起伏不平的地面上能不能让桌子的四个脚同时着地？
- 假设：
  - 1.方桌的四条腿等长，四脚连线呈平面正方形ABCD。
  - 2.地面的起伏是连续变化的。

## 模型：

1. 如何用描述“桌子的四脚同时着地”？

$x_A$ ：A与地面的距离， $x_B$ 、 $x_C$ 、 $x_D$ 。

2. 如何用描述让桌子的四脚着地？

■ 定位：中心O位于坐标原点

■ 移动：桌子围绕中心转动。

■  $\theta$ ：AC与X轴的夹角。

■  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 90^\circ = \theta_1$ 。

■  $x_A(\theta)$  表示桌脚A与地面的距离。

■ 同样  $x_B(\theta)$ ,  $x_C(\theta)$ ,  $x_D(\theta)$ 。

■ 对任  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$  桌腿不做垂直地面的运动。

■ 令  $f(\theta) = x_A(\theta) + x_C(\theta)$ ,

■  $g(\theta) = x_B(\theta) + x_D(\theta)$

■ 则有  $f(\theta), g(\theta)$  连续且  $f(\theta)g(\theta) \equiv 0$ .

■ 桌子在位置  $\theta_*$  四脚落地,

■ 则有  $f(\theta_*) = 0, g(\theta_*) = 0$ .

■ 若  $f(\theta_0) = 0, g(\theta_0) > 0$ ,

■ 则有  $f(\theta_1) > 0, g(\theta_1) = 0$

■ 令  $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$ ,

■ 则有  $h(\theta)$  连续且  $h(\theta_0) < 0, h(\theta_1) > 0$ .

## 问题:

1. 将例2的假设1 改为“方桌的四条腿等长，四脚连线呈平面长方形”，

试构造数学模型证实结论同样成立。





■ 2. 小王早上8:00从A城出发于下午5:00到达B城。

■ 次日早上8:00他又从B城出发沿原路返回并于下午5:00准时到达A城。

■ 试用数学模型说明A、B城之间定有一个位置，

■ 小王在往返A、B二城的途中于相同的时间到达该位置。



## 例 3: 交通路口红绿灯

---

- 十字路口绿灯亮15秒，最多可以通过多少辆汽车？

# 假设

1. 车辆相同，从静止开始做匀加速动。
  2. 车距相同，启动延迟时间相等。
  3. 直行，不拐弯，单侧，单车道。
  4. 秩序良好，不堵车。
- **参量，变量**
- 车长 $L$ ，车距 $D$ ，加速度 $a$ ，启动延迟 $T$
  - 时间 $t$ ，车位 $S_n(t)$

# 模型

1. 停车位模型:  $S_n(0) = -(n-1)(L+D)$
2. 启动时间:  $t_n = nT$
3. 行驶模型:  $S_n(t) = S_n(0) + 1/2 a (t-t_n)^2, t > t_n$
4. 限速行驶:
  - $t_{n^*} = a/v_* + t_n$
  - $S_n(t) = S_n(0) + 1/2 a (t_n - t_{n^*})^2 + v_*(t - t_{n^*}), t > t_{n^*}$
  - $= S_n(0) + 1/2 a (t - t_n)^2, t_{n^*} > t > t_n$
  - $= S_n(0), t_n > t$

# 参数估计

- $L=5\text{m}$ ,  $D=2\text{m}$ ,  $T=1\text{s}$ ,
- $v_* = 40\text{km/h} = 1.1\text{m/s}$
- $a = 2.6\text{m/s}^2 \otimes 2\text{m/s}^2$ .



## 结 论

---

- $S_8(15) = 9\text{m}$ ,  $S_9(15) = -9.1\text{m}$
- 该路口最多通过八辆汽车

# 问题

- 1. 调查一个路口有关红绿灯的数据验证模型是否正确。

- 1<sup>0</sup>. 位置, 走向, 车道数, 时间。

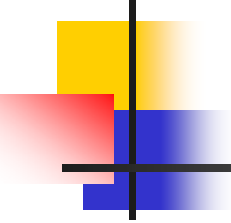
- 绿灯时间, 通过的车数(至少三次)。

- 数据不同的原因。

- 2<sup>0</sup>. 模型的假设与实际是否一致。

- 模型的参数与实际是否一致。

- 3<sup>0</sup>. 模型的计算结果与观测结果是否一致? 不一致时, 为什么? 如何修改模型。

- 
- 
- 2. 分析汽车开始以最高限速穿过路口的时间。
  - 3. 给出穿过路口汽车的数量随时间变化的数学模型。



## 例 4：人员疏散

---

- 建模分析意外事件发生时建筑物内的人员疏散所用的时间。

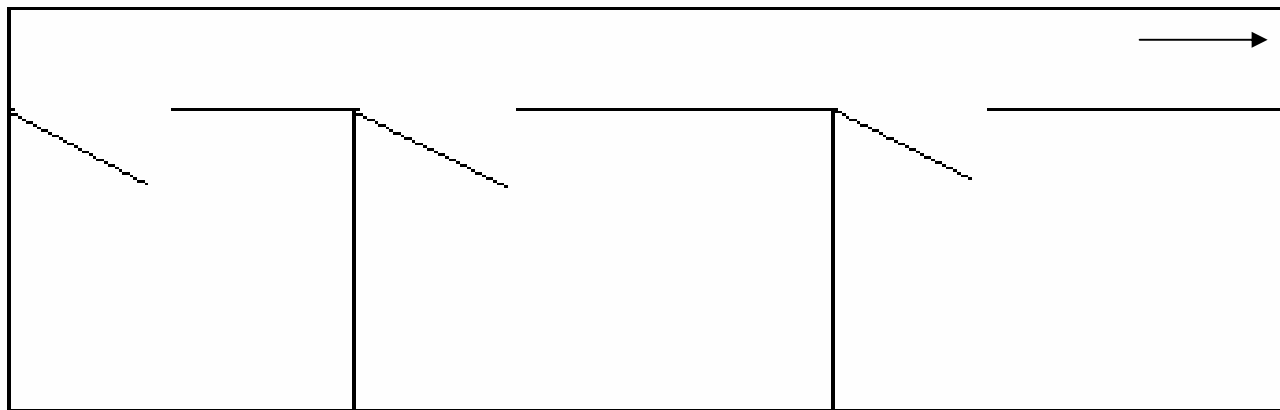


# 假 设

---

- 1. 单排教室，直走道，一个出口。
- 2. 人员撤离时，单行、有序、间隔均匀、匀速地撤出。
- 3. 忽略列队的时间和第一个人到达教室门口的时间。

# 参数



- 人数  $n_k$ , 教室距离  $L_k$ , 门宽  $D$ .
- 速度  $v$ , 间隔  $d$ , 疏散时间  $T_k$



# 模 型

---

- $T_1 = (n_1 d + L_1) / v$
- $T_2 = (n_2 d + L_1 + L_2 + D) / v$
- $T_{12} = (n_2 d + L_1 + L_2 + D) / v, \quad (L_2 + D) \geq (n_1 + 1) d$
- $[(n_1 + n_2 + 1) d + L_1] / v, \quad (L_2 + D) < (n_1 + 1) d$



# 讨 论

---

- 1. 模型分析 :  $T=(nd+L)/v$ ,
- $v$  增, 则  $T$  减;  $d$  增, 则  $T$  增.
- 合理
- 2. 多行行进
- 3.  $d$  减, 则  $T$  减. 令  $d=0$ , 则有  $T=L/v$ .
- 疏散时间与人数无关!
- 假设中忽略了人体的厚度!!

# 修改假设

- 1. 单排教室，直走道，一个出口。
- 2. 人员撤离时，单行、有序、间隔均匀、匀速地撤出。
- 3. 忽略列队的时间和第一个人到达教室门口的时间。
- 4. 人体厚度相同 $w$

# 继续讨论

- 1.  $T=(nd+L)/v$ ,  $v$ 增, 则 $T$ 减;  $d$ 增, 则 $T$ 增.

---

  - 2. 多行行进
  - 3. 令 $d=0$ , 则有 $T=L/v$ , 疏散时间与人数无关!
  - 假设中忽略了人体的厚度!!
  - 4. 考虑厚度的影响  $T=(n(d+w)+L)/v$ ,
  - 若 $v \gg v_*$ ,  $d=0$ , 则  $T_* = (nw+L)/v_*$  最短
- 合理吗?

## 继续修改假设

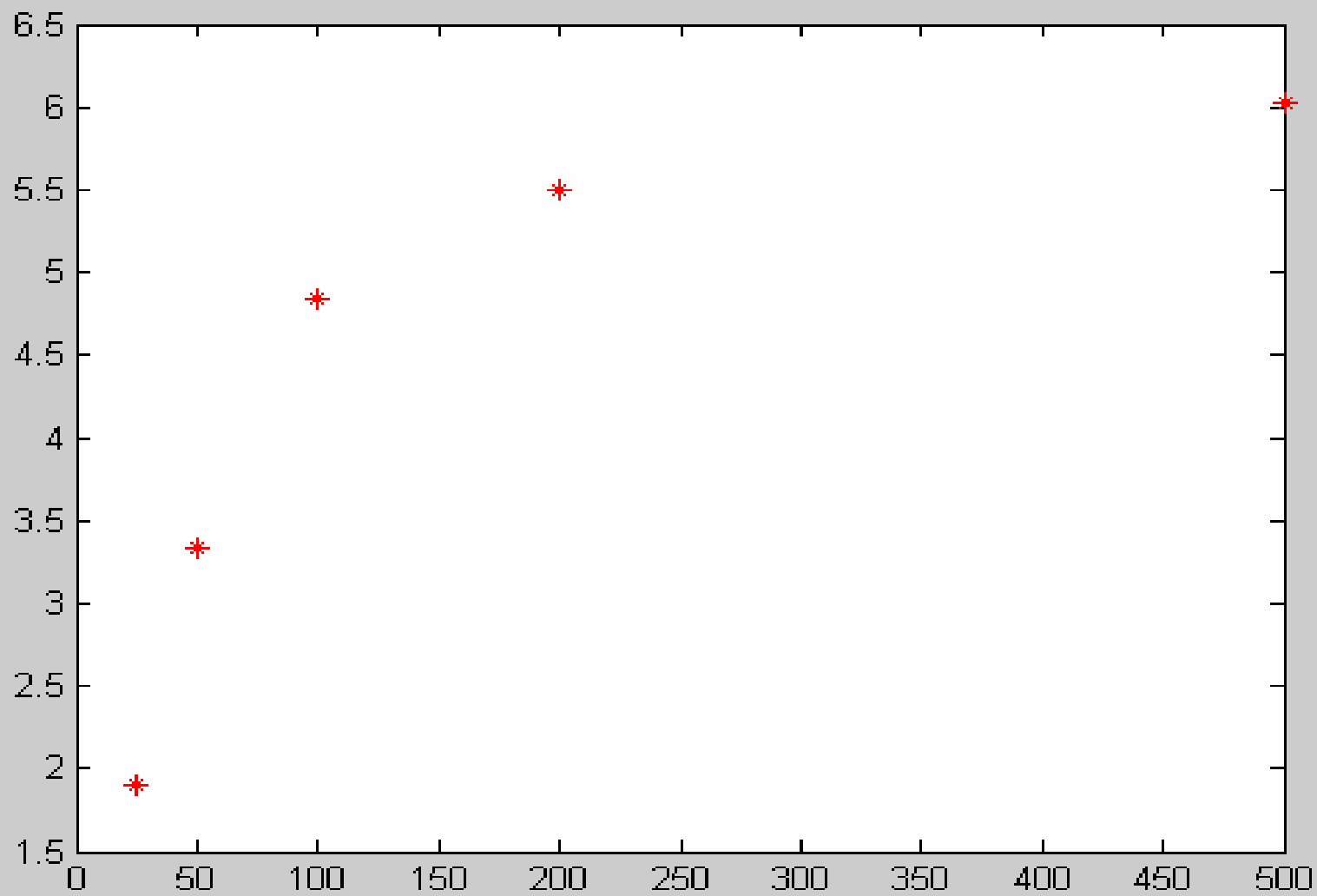
1. 单排教室，直走道，一个出口。
2. 人员撤离时，单行、有序、间隔均匀、匀速地撤出。
3. 忽略列队的时间和第一个人到达教室门口的时间。
4. 人体厚度相同
5. 速度与密度有关  $v = v(d)$

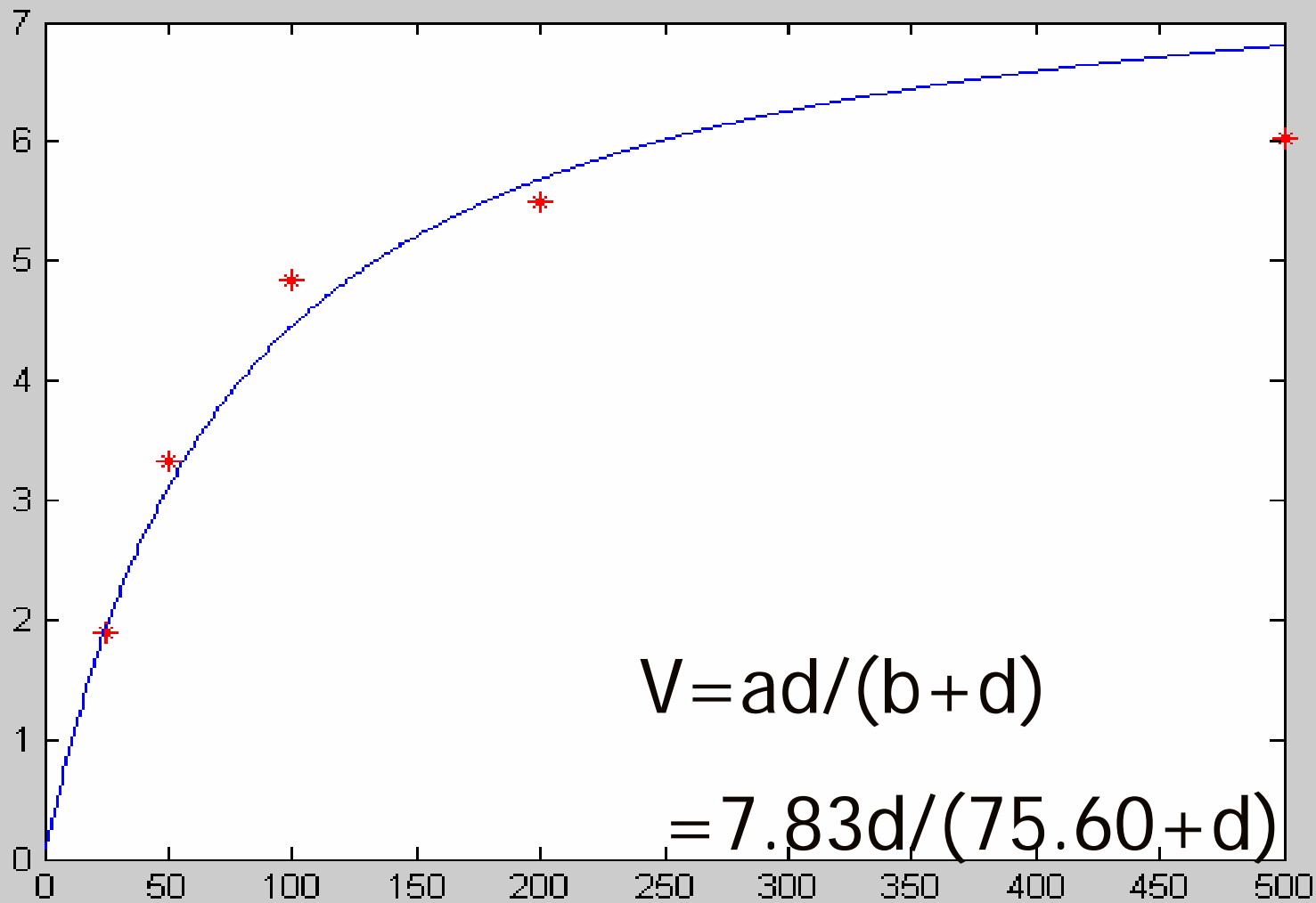


# 模 型

---

- $T = (nd + L) / v(d)$ , 其中
- $v = v(d)$  应满足
- $d$  增, 则  $v$  增;
- 若  $d \rightarrow \odot$ , 则  $v = v_*$ .
- 若  $d = 0$ , 则  $v = 0$ .
- 这时存在唯一的间隔  $d^*$  和相应的速度  $v^*$ , 使得疏散的时间最短?





## 问题

在上面的讨论中，证明如果疏散队伍的速度是队列间隔的增函数，

- 则存在有唯一的间隔 $d^*$  和速度 $v^*$ ，使得疏散的时间最短。
- 如果有 $n=400$ ， $L=30\text{m}$ ， $w=0.2\text{m}$ ，求最优疏散方案。